УДК 372.851
DOI: 10.25688/2782-6597.2022.2.2.3

С. В. Попов[1]

[1] Колледж автоматизации и информационных технологий № 20,
Москва, Российская Федерация
E-mail: s-v-popov@yandex.ru, ORCID: 0000-0002-5784-0057

Информационная система «Живая математика» как среда развития математических компетенций

Аннотация. В современных условиях российского образования поступление выпускника школы в престижный вуз на бюджетное место возможно лишь при условии его активной олимпиадной деятельности и высокого балла по ЕГЭ. Однако стандартная школьная программа не гарантирует требуемой подготовки по математике, и поэтому школьнику приходится прибегать к услугам репетиторов. В связи с этим автор разработал программный комплекс «Живая математика», который в большой степени сможет заменить хорошего репетитора по математике. Этот комплекс выступает как автоматизированный репетитор по всему курсу школьной математики. «Живая математика» создавалась как инструмент развития у школьника устойчивых навыков математического мышления. В представляемой системе собраны наиболее эффективные приемы поиска решения (так называемые метаприемы), что позволяет школьнику увидеть и осознать все этапы искомого решения. Система включает в себя все приемы, необходимые для решения задач из всех разделов школьной математики, уделяя внимание задачам повышенной сложности. «Живая математика» не решебник, содержащий решение фиксированного множества задач. Подход «Живой математики» кардинально отличается от традиционного: не давая окончательного решения, в случае возникновения затруднений формулировать необходимые подсказки о направлении поиска. Методы «Живой математики» базируются на теории логического вывода и приемах ограниченного перебора, рамки которого задаются условиями задачи.

Ключевые слова: математика; единая среда; школа; олимпиады; алгебра; геометрия; тригонометрия; искусственный интеллект.

S. V. Popov[1]

[1] College of Automation and Information Technologies № 20,
Moscow, Russian Federation
E-mail: s-v-popov@yandex.ru, ORCID: 0000-0002-5784-0057

Information system «Living mathematics» as a environment for the development of mathematical competences

Annotation. In modern conditions of Russian education, a student's admission to a prestigious technical university for a budget place is possible only if he is active in the Olympiad and has a high score on the Unified State Exam. However, the standard school curriculum does not guarantee the required training in mathematics and therefore the student has to resort to the services of tutors. In this regard, the author has developed a software package «Live Mathematics», which to a large extent will be able to replace a tutor in mathematics. This complex acts as an automated tutor for the entire course of school mathematics. «Live Mathematics» was planned as a tool for developing stable mathematical thinking skills in schoolchildren. The presented system contains the most effective methods of finding a solution (the so-called metaprimes), which allows the student to see and understand all the stages of the desired solution. The system includes all the techniques necessary to solve problems from all sections of school mathematics, paying attention to problems of increased complexity. «Living Mathematics» is not a solution book containing the solution of a fixed set of problems. The approach of «Living Mathematics» is radically different from the traditional one: without giving a final decision, in case of difficulties, formulate the necessary hints about the direction of the search. The methods of «Living Mathematics» are based on the theory of logical inference and techniques of limited iteration, the scope of which is set by the conditions of the problem.

Keywords: mathematics; unified environment; school; Olympiads; algebra; geometry; trigonometry; artificial intelligence.

Для цитирования: Попов С. В. Информационная система «Живая математика» как среда развития математических компетенций. Вестник МГПУ. Серия «Современный колледж». 2022. № 2 (2). С. 28–37.

For citation: Popov, S. V. (2022). Information system «Living mathematics» as a environment for the development of mathematical competences. *MCU Journal of Modern Collede, 2* (2), 28–37.

Введение

Известно, что культура принятия решений, т. е. умение находить и логически обосновывать решения в незнакомых ситуациях, востребована управленцами практически любой отрасли, что, несомненно, требует от них творческого подхода в своей деятельности. Бесспорно, что эффективно творить, т. е. открывать неизведанное, наиболее продуктивно учит математика. Поэтому очевиден вывод: надо повышать математическую культуру каждого ученика или студента колледжа, чтобы решение творческих задач для него стало скорее нормой, чем исключением [4, 6].

В настоящее время поступить в престижный технический вуз могут школьники, которые зарекомендовали себя в олимпиадном движении и набрали высокий балл по ЕГЭ. Однако стандартная школьная программа по математике не способствует ни тому ни другому. В результате школьники вынуждены прибегать к услугам репетиторов, среди которых хороших очень мало [4, 11]. Но репетитор, как правило, не учит творчеству, а лишь обучает стандартным приемам, которые зарекомендовали себя как ведущие к цели с минимальными затратами. Обычно репетиторы не выходят за рамки школьной программы, ставя перед школьником цель — прилично сдать ЕГЭ. Но если школьник является творческой личностью и хочет поучаствовать в олимпиадном движении, то всецело полагаться на помощь репетиторов не стоит. Здесь нужен принципиально иной подход, способствующий развитию творческого начала у школьника.

Исходя из этих предпосылок, автор реализовал программный комплекс «Живая математика», отражая тем самым мысль, что математика не статична, а представляет собой развивающийся организм [3, 10]. Отметим, что «Живая математика» — это не решебник, содержащий большое число решений задач. Реализованный в ней подход в корне иной — дать возможность ученику самостоятельно найти решение, используя подсказки в трудных местах и прибегая к тем приемам решений, которыми в изобилии располагает система.

Отметим, что проблема формирования математических знаний, умений и навыков в современной средней школе очень остра [2, 5, 9]. И автор надеется, что «Живая математика» позволит каждому школьнику развить в себе логическое мышление, что является обязательным условием для успеха в любой области, где необходимо принимать решения, адекватные возникающим задачам. Наиболее эффективные приемы решения задач (так называемые *метаприемы*) автор собрал в представляемой системе, которая дает возможность наглядно увидеть все этапы, приводящие к искомому решению. В результате с приобретением навыков видения вначале простых, а затем сложных решений ученику становится легче представить полное решение. Типичным примером этого является этап алгоритмизации решения задачи, без которого невозможна эффективная работа, например программиста.

В заключение отметим, что в «Живой математике» автор реализовал концепцию единой среды математики, которой, как представляется, является школьная математика. Поясним этот тезис следующим образом. Развитое геометрическое мышление помогает при решении алгебраических и тригонометрических задач, а свободное владение алгебраическими навыками позволяет увидеть в геометрических задачах новые аспекты. И, наконец, развитое комбинаторное мышление необходимо во всех областях школьной (да и не только) математики, так как позволяет формировать логический каркас рассуждений, приводящих к искомому решению.

«Живая математика» — это продукт, полезный не только школьникам, предполагающим поступать в вузы или участвовать в олимпиадном движении. Вопрос успешной сдачи ЕГЭ столь же актуален для студентов колледжей, желающих продолжить свое образование в вузе, так как высокий балл по ЕГЭ и для них является залогом поступления в престижный вуз на бюджетные места.

Как будет ясно из последующего изложения, «Живая математика» в ее нынешнем виде представляется применением методов искусственного интеллекта в школьном образовании [7].

Конструкция системы

Укажем некоторые наиболее существенные метаприемы, которые отчетливо усматриваются при решении школьных задач повышенной сложности и которые реализованы в ИС «Живая математика».

1. Предварительное *преобразование задачи* состоит в том, что по исходной задаче формулируется эквивалентная ей в том смысле, что решение последней влечет решение исходной. К таким преобразованиям относятся: формулировка обратной задачи; метод доказательства от противного; выделение подзадач, которые необходимо решить для получения искомого ответа; обобщение задач; использование индуктивных рассуждений и т. п. Все эти приемы с поясняющими примерами перечислены в разделе «Подсказки», где можно найти подсказку для решения исходной задачи. В школьной математике не так много искусственных приемов, которые помогают решать задачи. Поэтому раздел «Подсказки» вполне обозримый. С опытом выбор учеником приема решения становится почти рутиной, и школьник приобретает навыки преобразования, наиболее предпочтительные для него. Одна из подсистем «Живой математики» помогает ученикам накапливать и систематизировать приемы сведения задач к другим [1, 8].

2. Подсистема *«Живая логика»* позволяет переходить от задачи к подзадачам, сохраняя логическое следование основной задачи из совокупности подзадач, т. е. в этой подсистеме реализовано логическое правило разбора случаев. Этот прием особенно нагляден при решении логических и комбинаторных задач, решаемых ограниченным перебором. В результате анализа вариантов появляется окончательное решение. «Живая логика» автоматизирует сведение к подзадачам, позволяя на лету предлагать и анализировать варианты решения. А наличие автоматической подсистемы логического вывода дает возможность обнаруживать противоречия и отвергать неверные гипотезы, указывая на это автору. При этом все принятые варианты сохраняются в базе данных. Поэтому всегда можно вернуться к предыдущему варианту и провести его дополнительный анализ. С технической точки зрения подсистема «Живая логика» формирует деревья решений большой глубины при неограниченном ветвлении в каждом узле. Такой разбор вариантов дает возможность проследить всю последовательность шагов, приводящих к решению исходной задачи. Если вы интересовались математическими головоломками, решение которых не удается увидеть сразу, а требует разбора случаев, то представляете полезность такого механизма. Например, решение такой головоломки: в выражение SEND + MORE = MONEY следует подставить разные цифры вместо разных букв, чтобы получилось тождество. Здесь же следует упомянуть широко распространенные логические задачи, например про волка, козу и капусту. При всей простоте своей формулировки задачи требуют от школьника умения логически мыслить и правильно выстраивать логические умозаключения. В школе, ввиду отсутствия предмета логики, этому не учат.

3. *Графическая иллюстрация задачи.* В большинстве алгебраических задач (например, решение уравнений, задач с параметрами, или тригонометрических уравнений) удачно подобранная графическая иллюстрация позволяет определить области, в которых следует искать решение, и число решений, зависящее от выбора параметров. Для этого надо уметь строить графики функций,

которые могут быть заданы явно или неявно, например характеристическими предикатами. В «Живой математике» имеется мощный аппарат построения графиков функций, используемых при решении алгебраических и тригонометрических задач. Это позволяет развивать у ученика так называемое геометрическое мышление, что крайне полезно для решения практически любых алгебраических и тригонометрических задач. Используя графический аппарат легко исследовать поведение функций. Тем самым удается наглядно увидеть различные свойства функции: область определения, существование асимптоты, вид и количество экстремумов, число решений уравнений, влияние параметров на вид графика и пр. Множество функций, для которых в «Живой математике» можно строить графики, практически неограниченно, так как имеется механизм суперпозиции функций из базисных. Тем самым у школьника накапливается опыт работы с нестандартными функциями, что существенно расширяет его возможности решения алгебраических и тригонометрических задач.

4. Вычисление *неподвижной точки*. Каждая решаемая задача предполагает наличие фиксированного множества объектов и отношений на нем, и совокупности преобразований для получения новых объектов. Наиболее типичный пример — геометрия, изучение которой требует от ученика развитого логического мышления. Но даже при достаточно бедном условии задачи количество возможных логических следствий, вытекающих из него, весьма велико. И среди них часть полезных, которые могут навести на искомое решение. Отфильтровывание ненужных и выделение полезных следствий есть цель работы механизма построения так называемых *неподвижных точек* [8]. Проиллюстрируем это следующим образом. Исходно задача формулируется в терминах относительно небольшого числа объектов (точек, отрезков, углов, треугольников и пр.) и отношений на них (равенства отрезков и углов, параллельности и коллинеарности отрезков и пр.). По мере применения тех или иных геометрических правил и теорем, множества объектов и отношений растут, достигая, наконец, состояния, когда рост прекращается и тем самым множества становятся максимальными. Такое максимальное множество полученных объектов и соотношений называется неподвижной точкой задачи. Если неподвижная точка содержит решение, то задача решена. Если нет, то «Живая математика» подскажет, какие новые свойства надо использовать, чтобы осуществить дополнительное построение и запустить вновь процесс получения новой более широкой неподвижной точки. В геометрии такие подсказки базируются на новых, ранее не использованных теоремах, соотношениях между фигурами, которые отсутствовали в исходном условии, имеющихся подсказках в справочной системе.

Автоматизируя этот процесс, можно автоматически решать задачи, но цель «Живой математики» состоит в ином — научить школьника эффективно обнаруживать и применять геометрические преобразования, используя возможности различных соотношений между элементами исходного чертежа и дополнительных построений. Тот же метод построения неподвижных точек относится и к получению новых алгебраических и тригонометрических соотношений. Заметим, что получение неподвижных точек приводит к необходимости обратиться к рассуждениям, которые не имеют линейного характера. Происходит накапливание информации, формулировка новых гипотез, их проверка, выделение кажущихся продуктивными и отбрасывание остальных.

Для трудных задач этот процесс можно повторять циклически, применяя различные критерии выделения и отбрасывания гипотез. Сформулированный подход представляет собой уточнение общего метода нахождения неподвижной точки, сформулированного автором, как реализация так называемой операционной семантики логических формул. На основании ее была создана система логического моделирования, которая выступает как механизм решения искусственно интеллектуальных задач, формулируемых в рамках логики первого порядка. Основная идея логического моделирования состоит в том, что сама задача является программой для собственного решения. Это удается строго доказать в формальных теориях математической логики. И на основании этого построить систему поиска неподвижной точки для содержательных задач, наподобие геометрических.

5. *Геометрическая иллюстрация*. Известно, что в геометрии для успешности решения задачи большое значение имеет удачный чертеж. Поэтому «Живая математика» содержит специализированный графический редактор, дающий возможность легко рисовать и перерисовывать чертеж, указывая все соотношения между его компонентами. Последние суть равенства отрезков, углов, треугольников и пр., отношение дополнения или вертикальности углов, перпендикулярности отрезков и т. п. Именно в терминах этих отношений осуществляется поиск неподвижных точек, которые на каждом этапе поиска выступают в качестве подсказок, позволяющих выбирать дальнейшие шаги. Установление новых соотношений на чертеже и выделение из них полезных — это функция модуля построения неподвижной точки. Геометрический редактор лишь дает возможность отобразить на чертеже полученные соотношения, поскольку геометрическое видение более эффективно позволяет формулировать продуктивные гипотезы.

6. *Система «Алгебраист»*. Умение преобразовывать алгебраические выражения дает существенное преимущество ученику при решении большого числа задач. Школьник, владеющий устойчивыми навыками алгебраических преобразований, может легко свести исходное выражение к наиболее выгодному виду, например разложить на множители, чтобы потом найти решение, найти частное от деления полиномов и пр. Часто вынесение нетривиального множителя в алгебраическом или тригонометрическом выражении оказывается далеко не простой задачей. Чтобы научить ученика видеть, как преобразовывать алгебраическое выражение, в «Живой математике» имеется подсистема «Алгебраист», обеспечивающая все необходимые в школьном курсе

алгебраические преобразования. С ее помощью ученик может легко получить различные результаты по исходному выражению: приведение подобных, умножение и деление полиномов, вынесение общих множителей, разложение на множители, сокращение полиномов и т. п. В случае алгебраических преобразований окончательного результата быть не может, так как он определяется условием решаемой задачи. Поэтому, имея под рукой разнообразные преобразования, ученик сможет получить тот результат, который, как ему кажется, быстрее приводит к решению, или получить искомое решение. Алгебраическая система «Алгебраист» — это не алгебраический калькулятор с полным набором необходимых преобразований. Это среда решения алгебраических задач со своим языком описания задач, интерпретатором преобразований, средством протоколирования и сохранения решений и т. п. Тем самым ученику предоставляется возможность совершать разнообразные алгебраические преобразования, которые существенно перекрывают программу средней школы. Тем более что в школах часть материала по алгебре проходится поверхностно или вообще не проходится, что определяется конкретным контингентом класса.

Следует заметить, что в системе «Алгебраист» широко используются методы искусственного интеллекта, так как не приходится говорить о наличии некоторого универсального метода решения алгебраических задач. Например, задача разложения многочлена на множители обладает существенной неопределенностью, что может привести к разным результатам. От умения получать эти результаты и легко с ними оперировать зависит успех в поиске искомого решения. Основными методами искусственного интеллекта являются представленные в «Алгебраисте» суть разнообразные стратегии поиска, которые могут выбираться пользователем, или самой системой, если подразумевается автоматическое решение.

7. Подсистема *привлечения известного ПО* и полезных ссылок. В настоящее время имеется много прикладных программ, которые учитель математики может использовать в школе. Например, Excel позволяет решать большое число вычислительных задач и полезен при решении переборных задач. Чтобы не повторять уже известное, «Живая математика» дает ссылки на такое ПО и сервисы, которые могут быть использованы в каждом конкретном случае. При этом для каждого ПО на примерах описывается методика его использования. Мы исходим из того, что современное информационное пространство не ограничивается только школьными учебниками. Оно включает в себя все доступные средства, позволяющие развить навыки и выработать у ученика собственный взгляд на возникающие проблемы. Привлечение с этой целью стороннего ПО не следует путать с распространенным среди школьников мнением, что все задачи уже решены и надо только покопаться в Интернете, чтобы найти решение. Такой подход не продуктивен, он скорее внушает ученику неуверенность в своих силах, что впоследствии приведет к неспособности мыслить самостоятельно, логически и принимать адекватные решения в реальной ситуации.

Выводы

Преимущества системы «Живая математика» определяются следующими факторами.

1. Представленная система есть уникальный пример использования методов искусственного интеллекта (логического вывода, нахождения неподвижной точки, ограниченного перебора, построения дерева решений, алгебраических преобразований) в области образования [12–16].

2. Разработка отличается широтой покрытия решаемых школьных задач. Практически любая задача из школьного курса может быть решена с использованием «Живой математики». Поэтому «Живая математика» незаменима при подготовке к ЕГЭ или олимпиадам по математике. Она позволяет исключить репетитора, с успехом реализуя его функции.

3. Наличие подсистемы «Живая логика» дает возможность осуществлять переход к подзадачам при поиске решения основной задачи, автоматически проверяя гипотезы. В результате проверки гипотеза метится как противоречивая либо как заслуживающая дальнейшего рассмотрения.

4. Использование авторского метода поиска неподвижной точки для решения математических задач оказывается эффективным средством нахождения решений по сравнению с традиционными методами автоматического поиска решений. Метод работает в геометрии, где он является основным в поиске доказательств, и в алгебраических и тригонометрических задачах для нахождения, например, минимального решения. Построение неподвижной точки отличает «Живую математику» от систем автоматического доказательства (так называемых пруверов), так как использует семантику предметной области, а не только формальные преобразования логических выражений.

5. Имеется возможность работы с произвольными алгебраическими и тригонометрическими функциями за счет суперпозиции базисных функций. Тем самым открываются возможности решения произвольных уравнений, и не только в рамках школьного курса.

6. Используются графические средства иллюстрации решений в геометрии, алгебре и тригонометрии. Тем самым включается визуальный аппарат школьников, дающий возможность им более эффективно справляться с возникающими трудностями.

7. «Живая математика» обладает дружественным интерфейсом, ориентированным в первую очередь на визуализацию математических построений, позволяя пользователю реализовывать разные методы решения задач.

8. Нынешнее состояние «Живой математики» — это приложение для настольного ПК. По мере окончательной отладки всех компонентов система будет реализована в виде веб-приложения, чтобы стать доступной широкому кругу пользователей.

Список источников

1. Аржаков А. В, Попов С. В. Образование в эпоху информатизации. О проблемах современного образования. LAPLambertAcademicPublishing, 2014. 161 с.

2. Бессмертный И. А. Системы искусственного интеллекта: учеб. пособие для СПО. 2-е изд., испр. и доп. М.: Юрайт, 2018. 130 с.

3. Галямова Э. Х. Методика обучения математике в условиях внедрения новых стандартов / Набережночелнинский гос. пед. ун-т. Набережные Челны, 2016. 116 с.

4. Гусев В. А. Теория и методика обучения математике: психолого-педагогические основы: учеб. пособие. 3-е изд., (эл.). М.: Лаборатория знаний, 2017. 456 с.

5. Иванов В. М. Интеллектуальные системы: учеб. пособие для вузов / под ред. А. Н. Сесекина. М.: Юрайт, 2017. 91 с.

6. Методика обучения математике. Формирование приемов математического мышления: учеб. пособие для вузов / Н. Ф. Талызина [и др.]; под ред. Н. Ф. Талызиной. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Юрайт, 2020. 193 с.

7. Перельман Я. И. Живая математика. Математические рассказы и головоломки. М.: Юрайт, 2020. 163 с.

8. Попов С. В. Математическое моделирование. М.: Тровант, 2006. 255 с.

9. Теория и методика обучения математике в школе: учеб. пособие / под общ. ред. Л. О. Денищевой. М.: БИНОМ, Лаб. знаний, 2011. 247 с.

10. Фридман Л. М. Теоретические основы методики обучения математике: пособие для учителей, методистов и пед. высш. учеб. заведений / Московский психолого-социальный институт М.: Флинта, 1998. 217 с.

11. Ястребов А. В. Методика преподавания математики: теоремы и справочные материалы: учеб. пособие для вузов. М.: Юрайт, 2020. 199 с.

12. Goldberg D. E. Genetic algorithms in search, optimization and machine learning. Reading, MA: Adisson-Wesley Professional, 1989. 432 p.

13. Isakov Yu. A. Artificial intelligence // ModernScience. 2018. № 6-1. С. 25–27.

14. Sutton R. S., Barton A. G. Reinforcement learning. An introduction Cambridge, MA: MIT Press, 1998. 322 p.

15. Vadinsky O. An overview of approaches evaluating intelligence of artificial systems // Acta informatica pragensia. 2018. № 7-1. С. 74–103.

16. Weiss G. (ed.). Multiagent systems. A modern approach to distributed artificial intelligence. Cambridge, MA; London, UK: MIT Press, 1999. 620 p.

References

1. Arzhakov, A. V., & Popov, S. V. (2014). *Education in the era of informatization. About the problems of modern education.* LAPLambertAcademicPublishing. 161 p. (In Russ.).

2. Immortal, I. A. (2018). *Artificial intelligence systems.* Textbook manual for SPO (2nd ed., ispr. and add). Moscow: Yurayt, 130 p. (In Russ.).

3. Galyamova, E. H. (2016). *Methods of teaching mathematics in the context of the introduction of new standards.* Naberezhnye Chelny State Pedagogical University. Naberezhnye Chelny. 116 p. (In Russ.).

4. Gusev, V. A. (2017). *Theory and methodology of teaching mathematics: psychological and pedagogical foundations.* Textbook (3rd ed., electronic edition). Moscow: Laboratory of Knowledge. 456 p. (In Russ.).

5. Ivanov, V. M. (2017). *Intelligent systems.* Textbook manual for universities (edited by A. N. Sesekin). Moscow: Yurayt. 91 p. (In Russ.).

6. Talyzina, N. F. [et al.] (2020). *Methods of teaching mathematics. Formation of methods of mathematical thinking.* Textbook for universities (edited by N. F. Talyzina; 2nd ed., reprint. and additional). Moscow: Yurayt. 193 p. (In Russ.).

7. Perelman, Ya. I. (2020). *Living mathematics. Mathematical stories and puzzles.* Moscow: Yurayt. 163 p. (In Russ.).

8. Popov, S. V. (2006). Mathematical modeling. Moscow: Trovant. 255 p. (In Russ.).

9. Denishcheva L. O. (Ed.) (2011). *Theory and methodology of teaching mathematics at school*. Studies. manual. Moscow: BINOM, Lab. knowledge. 247 p. (In Russ.).

10. Friedman, L. M. (1998). *Theoretical foundations of mathematics teaching methods.* Manual for teachers, methodologists and teachers. higher. studies. institutions. Moscow Psychological and Social Institute. Moscow: Flint. 217 p. (In Russ.).

11. Yastrebov, A. V. (2020). *Methods of teaching mathematics: theorems and reference materials.* Textbook for universities. Moscow: Yurayt. 199 p. (In Russ.).

12. Goldberg, D. E. (1989). *Genetic algorithms in search, optimization and machine learning.* Reading, MA: Adisson-Wesley Professional, 432 p.

13. Isakov, Yu. A. (2018). Artificial intelligence. *ModernScience,* 6-1, 25–27.

14. Sutton, R. S., & Barton, A. G. (1998). *Reinforcement learning.* An introduction Cambridge, MA: MIT Press, 322 p.

15. Vadinsky, O. (2018) An overview of approaches evaluating intelligence of artificial systems. *Acta informatica pragensia,* 7-1, 74–103.

16. Weiss, G. (Ed.) (1999). *Multiagent systems. A modern approach to distributed artificial intelligence.* Cambridge, MA; London, UK: MIT Press, 620 p.